PRELEGEREA 4
STATICA GRINZILOR CONTINUE

4.1 Elemente şi ansambluri structurale

Elementul de grindă continuă (obişnuit, component al grinzilor continue plane) este elementul structural cu o dimensiune geometrică mult mai mare decât celelalte două, lungimea *L*, cu momentul de inerţie la încovoiere al secţiunii transversale, constant, *I*, constituit dintr-un material caracterizat de modulul de elasticitate, constant, *E*, la care deplasările extremităţilor şi forţele corespunzătoare se manifestă într-un plan ce conţine axa longitudinală (figura 4.1).

Pentru studiul deformării elastice a elementului structural se definesc parametrii proprii d_1, d_2, d_3, d_4, f_1, f_2, f_3, f_4, raportaţi la reperul propriu definit de axa *x* dispusă longitudinal elementului şi axa *y* dispusă normal la axa longitudinală a acestuia (figura 4.1).

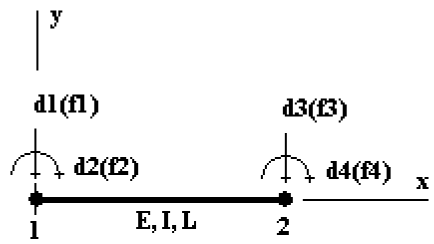

Figura 4.1 Element structural grindă continuă în sistemul de axe propriu *xy*

Ecuaţia de echilibru static a elementului structural grindă continuă aflat într-un spaţiu bidimensional, stabilită prin metodele staticii structurilor, este dată de relaţiile 4.1.1

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

sau în exprimare matriceală compactă (4.1.1)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

unde: $[ke]$ este matricea de rigiditate a elementului structural grindă continuă raportată la parametrii proprii d_1, d_2, d_3, d_4, f_1, f_2, f_3, f_4;

$\{d\}$ - vectorul deplasărilor extremităţilor elementului structural grindă continuă sau parametrilor principali proprii d_1, d_2, d_3, d_4;

$\{f\}$ - vectorul forţelor ce acţionează la extremităţile elementului structural grindă continuă sau parametrilor secundari proprii f_1, f_2, f_3, f_4.

Structurile cu elemente grindă continuă se organizează după o direcţie, obişnuit deformându-se într-un plan (figura 4.2); se pot imagina şi structuri cu elemente grindă continuă care se pot deforma într-un spaţiu cu trei dimensiuni.

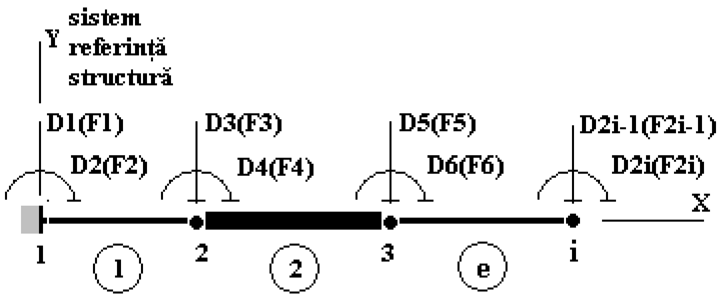

Figura 4.2 Structură plană cu elemente structurale grindă continuă în sistemul de axe structural *XY*

Pentru fiecare nod *i* al unei structuri plane cu elemente grindă continuă se definesc câte doi parametri principali D_{2i-1} şi D_{2i}, primul fiind translaţie după a doua axă a reperului structurii (obişnuit *Y*) şi al doilea rotire în planul reperului structurii (obişnuit *XY*); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri principali. Parametrii secundari corespunzători sunt forţele nodale F_{2i-1} şi F_{2i} (moment); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri secundari. Parametrii sunt pozitivi dacă vectorii ce îi definesc au acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care sunt paraleli sau rotesc în sens antiorar. Din aceste considerente se poate aprecia că ecuaţia de echilibru mecanic a structurii plane va fi constituită din *2n* ecuaţii.

Compatibilitatea deplasărilor extremităţilor elementului cu deplasările nodurilor de conectare ale structurii este asigurată.

4.2 Statica matriceală clasică pentru analiza structurilor plane cu elemente grindă continuă

4.2.1 Ecuaţia matriceală de echilibru static a elementului structural grindă continuă

Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static, pentru elementul structural curent *e* al unei structuri plane cu elemente grindă continuă, implică parcurgerea unui proces etapizat.

Etapa 1.1. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii proprii, cu proiecţia acestora în sistemul de referinţă propriu *xy* (în această etapă notaţiile utilizează minuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii proprii elementului însoţite de *e* pentru indicarea apartenenţei la elementul structural curent), relaţia E1.1,

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

sau (E1.1)

$$[ke]\cdot\{d\} = \{f\}$$

Etapa 1.2. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii structurali aferenţi elementului curent *e* (De_{2i-1}, De_{2i}, De_{2j-1}, De_{2j}, Fe^{e}_{2i-1}, Fe^{e}_{2i}, Fe^{e}_{2j-1}, Fe^{e}_{2j}), cu proiecţia acestora în sistemul de referinţă unic *XY* (în această etapă notaţiile utilizează majuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii structurii aferenţi elementului *e* iar *e*-indice superior pentru fracţiunea de participare a elementului curent la ansamblul structural), relaţia E1.2,

$$\begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{2,4} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} De_{2i-1} \\ De_{2i} \\ De_{2j-1} \\ De_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fe^{e}_{2i-1} \\ Fe^{e}_{2i} \\ Fe^{e}_{2j-1} \\ Fe^{e}_{2j} \end{Bmatrix}$$

sau (E1.2)

$$[Ke] \cdot \{De\} = \{Fe^{e}\}$$

Parametrii proprii ai extremităţilor elementului structural plan grindă continuă sunt proiectaţi pe direcţiile parametrilor structurali aferenţi ai nodurilor de conectare cu ajutorul matricei de transformare prin rotire *T*, care are ca elemente componente cosinşii directori ai axelor proprii (*x* şi *y*) definiţi funcţie de reperul structurii (*XY*). În acest caz matricea de transformare prin rotire este de forma:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde: α este unghiul măsurat, în sens pozitiv, de la axa de referinţă *X* către axa de referinţă *x* (antiorar).

Matricea *T* este o matrice ortogonală şi are proprietatea că inversa este identică cu transpusa:

$$[T]^{-1} = [T]^{T}$$

Relaţiile de legătură dintre parametrii proprii şi parametrii structurali aferenţi sunt:

$$\{d\} = [T] \cdot \{De\} \qquad\qquad \{f\} = [T] \cdot \{Fe^{e}\}$$

care, înlocuite în relaţia E1.1 şi operat corespunzător, conduc la stabilirea matricei de rigiditate a elementului structural tip grindă continuă plan raportată la parametrii structurali aferenţi:

$$[Ke] = [T]^{T} \cdot [ke] \cdot [T]$$

Unghiul α poate fi ales totdeauna egal cu zero, prin faptul că totdeauna poate fi găsit un sistem de referinţă al structurii unic (*XY*) care să coincidă cu sistemul propriu al fiecărui element de grindă continuă (*xy*).

Etapa 1.3. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilbru static prin raportare la parametrii structurii, obţinută prin completarea cu ecuaţii fictive corespunzătoare parametrilor structurii ce nu sunt aferenţi sau nu aparţin elementului structural plan tip grindă continuă (în această etapă notaţiile utilizează majuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii structurii şi *e*-indice superior pentru fracţiunuea de participare a elementului curent *e* la ansamblul structural):

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^e & . & . & . & K_{1,2n}^e \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ K_{2n,1}^e & . & . & . & K_{2n,2n}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ . \\ . \\ . \\ D_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ . \\ . \\ . \\ F_{2n}^e \end{Bmatrix}$$

sau (E1.3)

$$\left[K^e\right] \cdot \{D\} = \{F^e\}$$

unde: $\left[K^e\right]$ este matricea de rigiditate a elementului structural zăbrea raportată la parametrii structurii (fracţiune a matricei de rigiditate a structurii);

$\{D\}$ - vectorul deplasărilor nodurilor structurii sau parametrilor principali ai structurii $D_1 \ldots D_{2n}$;

$\{F^e\}$ - fracţiunea vectorului forţelor nodurilor structurii sau parametrilor secundari ai structurii $F_1^e \ldots F_{2n}^e$.

4.2.2 Analiza statică a grinzii continue plane

Enunţarea problemei: să se efectueze analiza statică a structurii plane cu elemente grindă continuă (determinarea deplasărilor nodurilor, forţelor din reazeme şi eforturilor din elementele structurale), caracteristicile geometrice şi mecanice, precum şi schema statică şi încărcările fiind precizate pe figura 4.3.

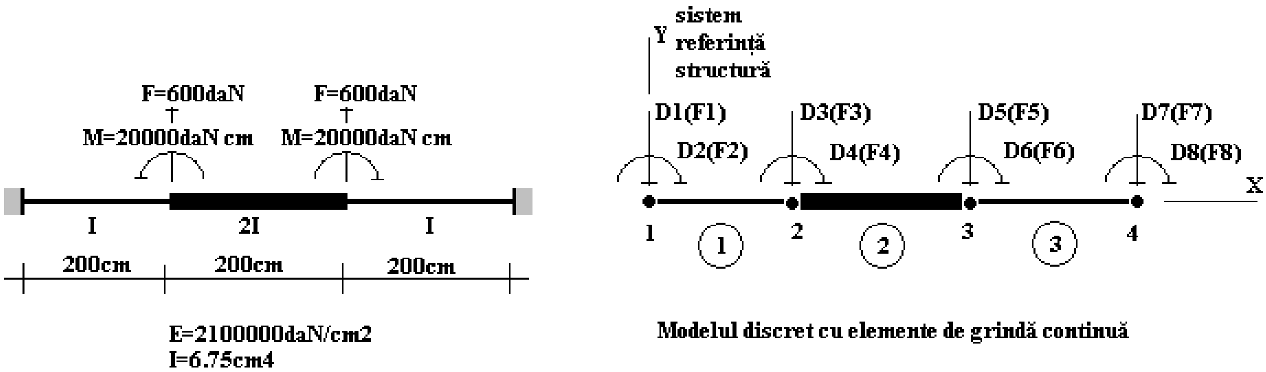

Figura 4.3 Structura plană cu elemente grindă continuă şi modelul discret corespunzător

Rezolvarea problemei: aplicaţia utilizează notaţii pentru variabile şi operatori corespunzând programului de calcul matematic Mathcad (simbolul := are înţelesul de atribuire).

Etapa 1, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru fiecare element grindă continuă.

Elementul grindă continuă 1 (figura 4.4.1)

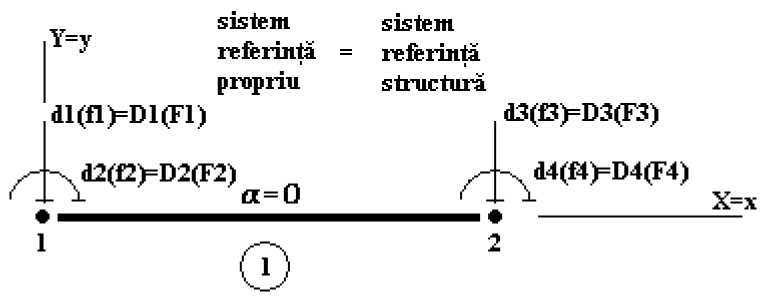

Figura 4.4.1 Parametri şi sisteme de referinţă pentru elementul grindă continuă 1

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii:

$$ke1 := \left(\frac{E \cdot I}{L^3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot L & -12 & 6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 4 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 2 \cdot L^2 \\ -12 & -6 \cdot L & 12 & -6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 2 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{pmatrix} \qquad ke1 = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 \\ -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\alpha := 0 \qquad T1 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k1 := T1^T \cdot ke1 \cdot T1$$

$$k1 = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 \\ -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali:

$$K1 := \begin{pmatrix} k1_{1,1} & k1_{1,2} & k1_{1,3} & k1_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1_{2,1} & k1_{2,2} & k1_{2,3} & k1_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1_{3,1} & k1_{3,2} & k1_{3,3} & k1_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1_{4,1} & k1_{4,2} & k1_{4,3} & k1_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementul grindă continuă 2 (figura 4.4.2)

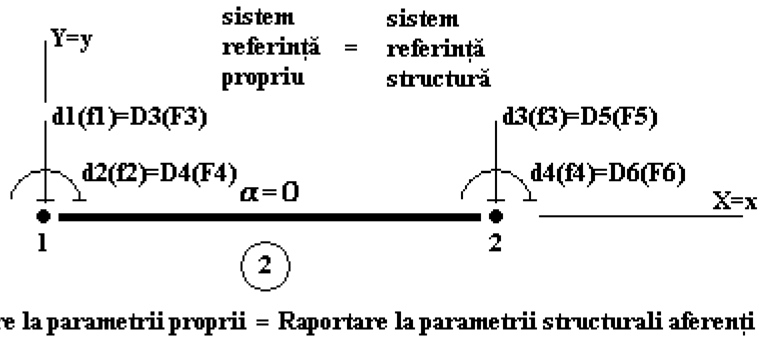

Figura 4.4.2 Parametri şi sisteme de referinţă pentru elementul grindă continuă 2

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii:

$$ke2 := \left(\frac{2\cdot E\cdot I}{L^3}\right)\cdot\begin{pmatrix} 12 & 6\cdot L & -12 & 6\cdot L \\ 6\cdot L & 4\cdot L^2 & -6\cdot L & 2\cdot L^2 \\ -12 & -6\cdot L & 12 & -6\cdot L \\ 6\cdot L & 2\cdot L^2 & -6\cdot L & 4\cdot L^2 \end{pmatrix} \qquad ke2 = \begin{pmatrix} 42.525 & 4252.5 & -42.525 & 4252.5 \\ 4252.5 & 567000 & -4252.5 & 283500 \\ -42.525 & -4252.5 & 42.525 & -4252.5 \\ 4252.5 & 283500 & -4252.5 & 567000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\alpha := 0 \qquad T2 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k2 := T2^T\cdot ke2\cdot T2$$

$$k2 = \begin{pmatrix} 42.525 & 4252.5 & -42.525 & 4252.5 \\ 4252.5 & 567000 & -4252.5 & 283500 \\ -42.525 & -4252.5 & 42.525 & -4252.5 \\ 4252.5 & 283500 & -4252.5 & 567000 \end{pmatrix}$$

$$K2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2_{1,1} & k2_{1,2} & k2_{1,3} & k2_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2_{2,1} & k2_{2,2} & k2_{2,3} & k2_{2,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2_{3,1} & k2_{3,2} & k2_{3,3} & k2_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2_{4,1} & k2_{4,2} & k2_{4,3} & k2_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42.525 & 4252.5 & -42.525 & 4252.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4252.5 & 567000 & -4252.5 & 283500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42.525 & -4252.5 & 42.525 & -4252.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4252.5 & 283500 & -4252.5 & 567000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementul grindă continuă 3 (figura 4.4.3)

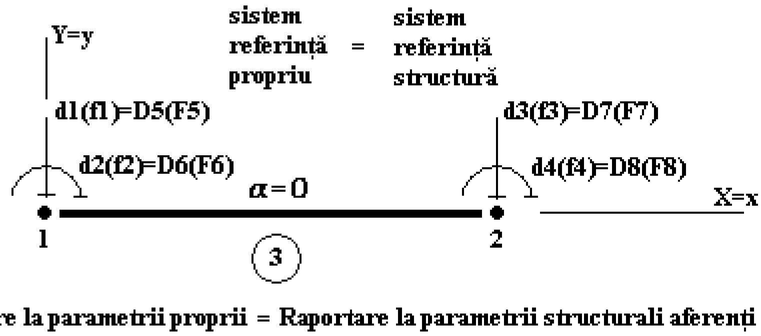

Figura 4.4.3 Parametri şi sisteme de referinţă pentru elementul grindă continuă 3

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii:

$$ke3 := \left(\frac{E \cdot I}{L^3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot L & -12 & 6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 4 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 2 \cdot L^2 \\ -12 & -6 \cdot L & 12 & -6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 2 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{pmatrix} \qquad ke3 = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 \\ -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi:

$$\alpha := 0 \qquad T3 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k3 := T3^T \cdot ke3 \cdot T3$$

$$k3 = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 \\ -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali:

$$K3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k3_{1,1} & k3_{1,2} & k3_{1,3} & k3_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k3_{2,1} & k3_{2,2} & k3_{2,3} & k3_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k3_{3,1} & k3_{3,2} & k3_{3,3} & k3_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k3_{4,1} & k3_{4,2} & k3_{4,3} & k3_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix}$$

Etapa 2, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a structurii:

$$K := K1 + K2 + K3$$

$$K = \begin{pmatrix} 21.263 & 2126.25 & -21.263 & 2126.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2126.25 & 283500 & -2126.25 & 141750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21.263 & -2126.25 & 63.788 & 2126.25 & -42.525 & 4252.5 & 0 & 0 \\ 2126.25 & 141750 & 2126.25 & 850500 & -4252.5 & 283500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42.525 & -4252.5 & 63.788 & -2126.25 & -21.263 & 2126.25 \\ 0 & 0 & 4252.5 & 283500 & -2126.25 & 850500 & -2126.25 & 141750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21.263 & -2126.25 & 21.263 & -2126.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2126.25 & 141750 & -2126.25 & 283500 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0$$

Etapa 3, introducerea condiţiilor la limită (cl):

$$Kcl := \begin{pmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} \\ K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} \\ K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} \end{pmatrix}$$

$$Kcl = \begin{pmatrix} 63.788 & 2126.25 & -42.525 & 4252.5 \\ 2126.25 & 850500 & -4252.5 & 283500 \\ -42.525 & -4252.5 & 63.788 & -2126.25 \\ 4252.5 & 283500 & -2126.25 & 850500 \end{pmatrix} \qquad |Kcl| = 60181176131246$$

$$Fcl := \begin{pmatrix} -600 \\ -20000 \\ -600 \\ 20000 \end{pmatrix}$$

Etapa 4, determinarea deplasărilor necunoscute (nec):

$$Dnec := \mathrm{lsolve}(Kcl, Fcl) \qquad Dnec = \begin{pmatrix} -50.794 \\ -0.226 \\ -50.794 \\ 0.226 \end{pmatrix}$$

- generarea vectorului deplasărilor:

$$D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Dnec_1 \\ Dnec_2 \\ Dnec_3 \\ Dnec_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -50.794 \\ -0.226 \\ -50.794 \\ 0.226 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 5 (auxiliară), determinarea forţelor din reazeme:

$Fnec1 := {K^{\langle 1 \rangle}}^T \cdot D$ $\quad Fnec1 = (600)$ $\quad Fnec2 := {K^{\langle 2 \rangle}}^T \cdot D$ $\quad Fnec2 = (76000)$

$Fnec7 := {K^{\langle 7 \rangle}}^T \cdot D$ $\quad Fnec7 = (600)$ $\quad Fnec8 := {K^{\langle 8 \rangle}}^T \cdot D$ $\quad Fnec8 = (-76000)$

- generarea vectorului forţelor:

$$F := \begin{pmatrix} Fnec1_1 \\ Fnec2_1 \\ Fcl_1 \\ Fcl_2 \\ Fcl_3 \\ Fcl_4 \\ Fnec7_1 \\ Fnec8_1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 600 \\ 76000 \\ -600 \\ -20000 \\ -600 \\ 20000 \\ 600 \\ -76000 \end{pmatrix}$$

Etapa 6 (auxiliară), determinarea eforturilor din bare:

Elementul structural grindă continuă 1

$$D1 := \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \qquad fe1 := ke1 \cdot T1 \cdot D1 \qquad fe1 = \begin{pmatrix} 600 \\ 76000 \\ -600 \\ 44000 \end{pmatrix}$$

Elementul structural grindă continuă 2

$$D2 := \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad fe2 := ke2 \cdot T2 \cdot D2 \qquad fe2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -64000 \\ -0 \\ 64000 \end{pmatrix}$$

Elementul structural grindă continuă 3

$$D3 := \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} \qquad fe3 := ke3 \cdot T3 \cdot D3 \qquad fe3 = \begin{pmatrix} -600 \\ -44000 \\ 600 \\ -76000 \end{pmatrix}$$

4.3 Stabilirea prin MEF - formularea directă a ecuaţiei matriceale de echilibru static - cu raportare la parametrii proprii a elementului finit plan grindă continuă

În MEF, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static raportată la parametrii proprii, pentru elementul finit plan grindă continuă, implică un proces de calcul etapizat.

Etapa 1.1.1. Identificarea problemei.

Fie elementul plan grindă continuă de lungime *L,* caracterizat de momentul de inerţie al secţiuni transversale, constant *I*, şi modulul de elasticitate, constant *E,* cu axa proprie *x* orientată pozitiv de la extremitatea *1* către extremitatea *2,* deplasările şi forţele manifestându-se la extremităţile sale (figura 4.5).

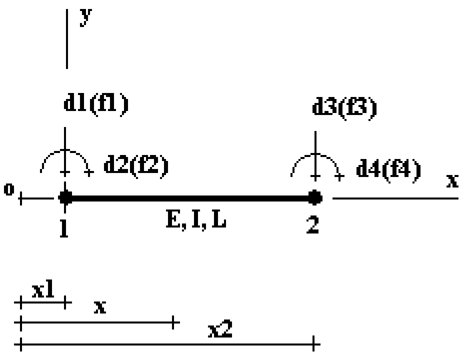

Figura 4.5 Definirea elementului plan grindă continuă

Problema constă în găsirea, în sistemul propriu de referinţă, a unei relaţii între vectorul parametrilor principali, constituit cu deplasările extremităţilor elementului plan grindă continuă d_1, d_2, d_3, d_4, şi vectorul parametrilor secundari, constituit cu forţele corespunzătoare f_1, f_2, f_3, f_4, de forma dată de relaţia E1.1.1.

$$[ke]\cdot\{d\}=\{f\} \qquad \text{(E1.1.1)}$$

Etapa 1.1.2: găsirea funcţiilor, convenabile, de aproximare a deplasărilor în secţiunea curentă, $v(x)$ şi $\theta(x)$.

Se face ipoteza că pe toată lungimea elementului plan grindă continuă deplasarea transversală *v(x)* este dată de o funcţie cu variaţie cubică (polinomială) şi rotirea *θ(x)* este dată de o funcţie obţinută prin derivarea funcţiei deplasare transversală, totul putându-se scrie simultan în forma matriceală dată de relaţia E1.1.2

$$\{d(x)\}=\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \alpha_1+\alpha_2\cdot x+\alpha_3\cdot x^2+\alpha_4\cdot x^3 \\ \alpha_2+2\alpha_3\cdot x+3\alpha_4\cdot x^2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

sau compact, de forma: (E1.1.2)

$$\{d(x)\}=[\Phi(x)]\cdot\{\alpha\}$$

unde: $[\Phi(x)]$ este matricea funcţiilor de aproximare;

α_i sunt coordonatele generalizate ale deplasărilor.

Etapa 1.1.3. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor în secţiunea curentă, *d(x)*, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului plan grindă continuă, $\{d\}$.

Se face afirmaţia că relaţia E1.1.2 este valabilă, inclusiv în extremităţile elementului plan tip grindă continuă şi aceasta se poate scrie simultan sub forma matriceală:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} v(x_1) \\ \theta(x_1) \\ v(x_2) \\ \theta(x_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}=[A]\cdot\{\alpha\}$$

de unde rezultă:

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\cdot\{d\}$$

care prin înlocuire în relaţia E1.1.2 conduce la relaţia E1.1.3

$$\{d(x)\}=[\Phi(x)]\cdot[A]^{-1}\cdot\{d\}=[N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]\cdot\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

sau (E1.1.3)

$$\{d(x)\}=[N(x)]\cdot\{d\}=N_1(x)\cdot d_1+N_2(x)\cdot d_2+N_3(x)\cdot d_3+N_4(x)\cdot d_4$$

unde $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$, $N_4(x)$ sunt funcţiile de formă ale elementului plan grindă continuă şi pentru cazul în care originea sistemului de referinţă propriu se alege în extremitatea 1 ($x_1=0$, $x_2=L$) sunt date de relaţiile (*Elemente finite concepte-aplicaţii, I. Pascariu, Editura Militară, Bucureşti, 1985*):

$$N_1(x)=\frac{2}{L^3}x^3-\frac{3}{L^2}x^2+1 \qquad N_2(x)=\frac{1}{L^2}x^3-\frac{2}{L}x^2+x$$
$$N_3(x)=-\frac{2}{L^3}x^3+\frac{3}{L^2}x^2 \qquad N_4(x)=\frac{1}{L^2}x^3-\frac{1}{L}x^2$$

Funcţiile de formă sunt funcţii de pondere, având proprietatea de a lua valoare maximă (unitară) în extremitatea în care acţionează parametrul principal aferent şi valoare minimă (zero) în extremitatea opusă.

În implementarea pe calculator a programelor bazate pe metoda elementului finit este importantă exprimarea funcţiei deplasărilor prin intermediul funcţiilor de formă.

Etapa 1.1.4. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deformaţiilor specifice în secţiunea curentă, $\varepsilon(x)$, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului plan grindă continuă, $\{d\}$.

Se pleacă de la definiţia curburii pentru grinda continuă plană, unde $R(x)$ este raza de curbură, relaţia E1.1.4

$$\{\chi(x)\} = \left\{\frac{1}{R(x)}\right\} = \left\{-\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right\} = \left\{-\frac{\partial \theta(x)}{\partial x}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [C] \cdot \{\alpha\}$$

$$= [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\}$$

sau în formă compactă (E1.1.4)

$$\{\chi(x)\} = [B] \cdot \{d\}$$

unde:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Etapa 1.1.5. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul eforturilor în secţiunea curentă, $\{M(x)\}$, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului plan grindă continuă, $\{d\}$.

Se pleacă de la definiţia deformării elastice pentru grinda plană continuă plan, relaţia E1.1.5

$$\{M(x)\} = \{E \cdot I \cdot \chi(x)\} = I \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{d\}$$

sau în formă compactă (E1.1.5)

$$\{M(x)\} = I \cdot [H] \cdot \{d\}$$

unde $[D]$ este matricea caracteristicilor mecanice-geometrice a elementului plan tip grindă continuă;
$[H]$ - notaţia consacrată a produsului $[D] \cdot [B]$.

Etapa 1.1.6. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor extremităţilor elementului plan tip grindă continuă, $\{d\}$, şi vectorul forţelor extremităţilor elementului plan tip grindă continuă, $\{f\}$.

.

Se pleacă de la definiţia lucrului mecanic, exprimarea în deplasări virtuale (aplicat pe toată lungimea elementului plan tip grindă continuă), pentru cel interior:

$$L_{\text{int}} = \int_L \{\chi^*(x)\}^T \cdot \{M(x)\} \cdot dx =$$
$$= \int_L \left(\{d^*\}^T \cdot [B]^T\right) \cdot \left(I \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{d\}\right) \cdot dx =$$
$$= \{d^*\}^T \cdot \left(I \cdot \int_L [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx \right) \cdot \{d\}$$

respectiv exterior:

$$L_{ext} = d_1^* \cdot f_1 + d_2^* \cdot f_2 + d_3^* \cdot f_3 + d_4^* \cdot f_4 = \{d^*\}^T \cdot \{f\}$$

şi se impune egalitatea lor, pentru existenţa echilibrului mecanic ($L_{int,=}L_{ext}$).

După egalarea celor doi termeni şi efectuarea simplificărilor (considerând că nu toate deplasările virtuale sunt egale cu zero) se obţine relaţia E1.1.6

$$\left(I \cdot \int_L [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx \right) \cdot \{d\} = \cdot \{f\}$$

sau în formă compactă (E1.1.6)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

ceea ce coincide cu relaţia E1.1.1 şi care trebuia găsită.

Integrala ce defineşte matricea de rigiditate poate fi rezolvată fie aproximativ, prin integrare numerică după o direcţie, fie exact (şi în această situaţie este posibil), prin înlocuirea termenilor şi efectuarea operaţiilor indicate, în final obţinându-se:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Ecuaţia de echilibru static de mai sus este identică cu cea cunoscută din statica matriceală clasică (4.1.1). În felul acesta elementul structural tip grindă continuă a devinit *element finit grindă continuă*, din categoria elementelor finite unidimensionale (*1D*).

În programele de calcul bazate pe metoda elementului finite acest tip de element finit se obţine prin particularizarea *elementului finit bară de cadru plan* la care se elimină parametrii proprii ce se manifestă pe direcţia longitudinală a barei.